A.V.Egorov D.Sc.

L’Hypothèse de Riemann

Moscou
Éditeur A.V.Egorov
2019

УДК 511.331.1
ББК 22.16
Е30

Егоров Андрей Владимирович

Е30 Гипотеза Римана (L'Hypothèse de Riemann) на фр. яз. / А.В.Егоров. — Москва: Издатель А.В.Егоров, 2019. — 8 с.

ISBN 978-5-600-01335-3

В брошюре предлагается опровержение гипотезы Римана о нулях дзета-функции.

УДК 511.331.1
ББК 22.16

ISBN 978-5-600-01335-3

L'Hypothèse de Riemann

Essai sur les zéros de la fonction zêta dans la bande critique

par Andrey Vlad. Egorov

Moscou, Russie

On convient généralement de dater ces questions de l'année 1859, d'un mémoire *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* par Riemann, où ce grand savant essayait sans succès d'établir l'hypothèse sous la forme suivante:

$$\zeta(s) \neq 0, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > \frac{1}{2},$$

où

$$\zeta(s) = \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)^{-1} \eta(s) = \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \sigma > 0, \quad s \neq 1.$$

Aujourd'hui on connaît plusieurs méthodes de traiter ce problème. Pendant tout le XXème siècle, quelque fécond que ce siècle ait été pour le développement de l'Analyse, la solution du problème n'a pas avancé.

Dans la suite on étudiera des fonctions définies positives. Elles forment une classe importante et possedent de nombreuses propriétés spécifiques. Une fonction $\mathcal{F}(v,w)$ est définie positive, si

$$\sum_{a,\,b} f_a \mathcal{F}(v_a, v_b) f_b \geq 0$$

pour tous les v et f. Il est maintenant facile de voir que la covariance d'une fonction aléatoire d'ordre deux est définie positive, et inversement.

Quelques propositions et remarques préliminaires sont nécessaires. Les propriétés suivantes découlent directement de la définition. Si $\mathcal{F}(v,w)$ est définie positive, il est de même de la fonction $F(v)F(w)\mathcal{F}(v,w)$; la fonction $\mathcal{F}(F(v),F(w))$ est aussi définie positive. Si tous les termes d'une série sont définies positives et si cette série converge, sa somme est définie positive. Le lecteur peut établir ces propriétés à titre d'exercice.

Ces faits etant rappelés, prouvons ici le Critère suivant: *posons* $0 < v, w < \infty$, *l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si la forme de deux variables*

$$\mathcal{F}(v,w) = \lambda^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-(v+w)u}\, du}{(1+e^{-vu})(1+e^{-wu})u^{2\varepsilon}} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-(v+w)u}\, du}{u^{2\varepsilon}}$$

est définie positive pour chaque $0 < \varepsilon < 1/2$ *et* $\lambda^2 = \lambda^2(\varepsilon)$ *assez grand.*

Démonstration. De fait, il s'ensuit que

$$\mathcal{F}(v,w) = \Gamma(1-2\varepsilon)\left\{\lambda^2 \sum_{n,\,m\,=\,1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+m)}}{(nv+mw)^{1-2\varepsilon}} - \frac{1}{(v+w)^{1-2\varepsilon}}\right\}.$$

Cette décomposition nous offre un moyen de démontrer que le critère ci - dessus subsiste dans sa forme primitive presque mot à mot. En effet,

$$\mathcal{F}(v,w) = (vw)^{\varepsilon-1/2}\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{v}{w}}, \sqrt{\frac{w}{v}}\right).$$

De toute évidence, la fonction

$$\mathcal{F}(e^x, e^y) = (e^x e^y)^{\varepsilon-1/2}\varphi(x-y)$$

est définie positive pour tous les $-\infty < x, y < \infty$ si et seulement si la forme $\mathcal{F}(v,w)$ est définie positive.

Tout d'abord, supposons que notre forme est définie positive. En d'autres termes, le signal

$$\varphi(x) = \mathcal{F}(e^{x/2}, e^{-x/2})$$

est défini positif dans le sens de Bochner. On a

$$\varphi(x) = \Gamma(1-2\varepsilon)\left\{\lambda^2 \sum_{n,\,m\,=\,1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+m)}}{(ne^{x/2}+me^{-x/2})^{1-2\varepsilon}} - \frac{1}{(e^{x/2}+e^{-x/2})^{1-2\varepsilon}}\right\}.$$

D'autre part,

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{2^{1-2\varepsilon}}\left\{\lambda^2 \sum_{n,\,m\,=\,1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n^{1/2-\varepsilon}m^{1/2-\varepsilon}\cosh^{1-2\varepsilon}\left(\frac{x+\ln(n)-\ln(m)}{2}\right)} - \frac{1}{\cosh^{1-2\varepsilon}\left(\frac{x}{2}\right)}\right\}.$$

D'après le théorème de Bochner sa transformée de Fourier

$$\widehat{\varphi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)e^{-ixt}\,dx}{2^{1-2\varepsilon}\cosh^{1-2\varepsilon}\left(\frac{x}{2}\right)}\left\{\lambda^2 \sum_{n,\,m\,=\,1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}n^{it}m^{-it}}{n^{1/2-\varepsilon}m^{1/2-\varepsilon}} - 1\right\}$$

est positive.

Dans cette optique, montrons que la fonction

$$\widehat{\varphi}(t) = \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\varepsilon+it\right)\right|^2\left\{\lambda^2\left|\eta\left(\frac{1}{2}-\varepsilon+it\right)\right|^2 - 1\right\} > 0$$

est positive. Mais dans ce cas, nous aurons $\zeta(s) \neq 0, \sigma > 1/2$, grâce à l'équation fonctionelle de la fonction zêta. On en déduit aussitôt que l'hypothèse de Riemann devrait être vraie.

Réciproquement, en vertu de l'hypothèse de Riemann (à l'aide de l'estimation de Lindelöf et de Littlewood) on a

$$0 < \left|\eta\left(\frac{1}{2} - \varepsilon + it\right)\right| \to \infty, \quad t \uparrow \infty.$$

Notre forme devrait être définie positive. Cela achève la démonstration. C. Q. F. D.

La même méthode peut être aussi appliquée aux problèmes analogues. Dans l'ordre d'idées que nous venons de suivre, il est interessant d'observer, sans entrer dans les détails, que ce nouveau concept est étroitement lié à la majoration - factorisation des opérateurs. Une démonstration ingénieuse a été donnée par R. G. Douglas (voir aussi Proc. Amer. Math. Soc. 17, 413 - 415, (1966)).

Le théorème est à son tour un cas particulier d'un théorème général affirmant le même fait pour les transformations d'un type encore plus général. Dans le mémoire la théorie est déjà exposée dans toute sa généralité sauf ce qui concerne l'étude de la fonction zêta. Dans ce qui suit, nous allons tirer quelques conséquences plus ou moins immédiates du fait fondamental que nous venons d'établir. D'ailleurs, les erreurs éventuelles, en aucun cas, être considérées comme résultats d'une volonté délibérée de violation. La difficulté de la tâche ne devrait pas empécher de trouver les moyens de résourdre le problème.

Néanmoins, ce type de méthode est facile à appliquer pour la fonction bêta de Dirichlet

$$\beta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^s}, \quad \sigma > 0.$$

Retournons à notre sujet principal: l'hypothèse de Riemann généralisée

$$\beta(s) \neq 0, \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

est vraie si et seulement si la forme engendrée par le noyau

$$\lambda^2 \int_0^\infty \frac{e^{-(v+w)u}\, du}{(1+e^{-2vu})(1+e^{-2wu})u^{2\varepsilon}} - \int_0^\infty \frac{e^{-(v+w)u}\, du}{u^{2\varepsilon}},$$

ou, en d'autres termes, sa transformée de Fourier double

$$\lambda^2 \int_0^\infty \frac{u^{2\varepsilon}\, du}{\cosh(vu)\cosh(wu)} - \int_0^\infty \frac{u^{2\varepsilon}\, du}{(1+(vu)^2)(1+(wu)^2)},$$

sont définies positives pour chaque $0 < \varepsilon < 1/2$ et $\lambda^2 = \lambda^2(\varepsilon)$ assez grand; nous laissons au lecteur de s'en convaincre sur la base des faits qui précèdent. Voir aussi l'inégalité de Löwner et de Heinz (Math. Ann. 123, 415 - 438, (1951)).

Voici alors les deux FAITS fondamentaux de la théorie (d'après N.Ng): *si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a*

$$\mathcal{J} = \inf_{\zeta(\varrho)=0} |\zeta'(\varrho)| = 0;$$

si $\mathcal{J} > 0$, *donc l'hypothèse de Riemann devrait être fausse.*

C'est pourquoi on obtient le THÉORÈME: *l'hypothèse de Riemann est fausse et tous les zéros de la fonction zêta de Riemann sont simples.*

DÉMONSTRATION. Il faut corriger la forme $\mathcal{F}(v, w)$ par un facteur compensateur. L'appareil qui a servi à la démonstration est le choix convenable de langage pour ne pas compliquer l'écriture.

Envisageons, à titre d'exemple, la forme du type de Nevanlinna - Pick engendrée par les noyaux définies positives

$$\int_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}} \cdot \frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\, dz \left\{ O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) - (1+e^{-vu})(1+e^{-wu}) \right\},$$

lorsque $\delta \downarrow 0$. Il importe de noter, par souci de clarté, que sa transformée de Laplace double est définie positive. Pour notre but immédiat nous nous besoin d'examiner de plus pres la fonction

$$\int_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}} \cdot \frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\, dz \int_0^\infty \left[\frac{O(1/\delta^2)}{(1+e^{-vu})(1+e^{-wu})} - 1 \right] \frac{e^{-(v+w)u}\, du}{u^{2\varepsilon}}.$$

Il est aisé de vérifier que cette fonction est définie positive. On a $\mathcal{J} > 0$. Si par contre $\mathcal{J} = 0$, alors pour un certain nombre δ assez petit cette fonction homogène n'est pas définie positive. On aboutit à une contradiction. C. Q. F. D.

À cet égard, j'estime opportun de citer J.E.Littlewood, qui a déclaré: *l'hypothèse de Riemann est fausse.* La mise en œvre de cette possibilité a déjà motivé quelques études, mais n'a cependant pas encore, à notre connaissance, été explorée de manière approfondie.

Nous nous borné ici aux renseignements les plus élémentaires, pour un exposé plus détaillé on pourra se reporter aux ouvrages indiqués dans la BIBLIOGRAPHIE:

[1] *de Branges L. Hilbert spaces of entire functions*, 1968
[2] *de Branges L., Rovnyak J. Square summable power series*, 1966

Научное издание

Егоров Андрей Владимирович

ГИПОТЕЗА РИМАНА

на французском языке

Подписано к печати 01.01.2019. Формат 60 x 90 / 16.
Бумага писчая. Печать цифровая. Усл. п. л. 0,5.
Тираж 5000 экз. Отпечатано на принтере.
Распространяется бесплатно.

Издатель А.В.Егоров
Адрес: г. Москва, Кудринская пл., д. 1, до востребования
e-mail: egorovmath@mail.ru

ISBN 978-5-600-01335-3
9 785600 013353