Über Millennium - Probleme*

Andrey Vlad. Egorov

Ph.D.

Zusammenfassung

Wie der Leser hoffentlich bald merken wird, war es eines der Hauptziele, die sich der Verfasser gestellt hat, den Zusammenhang zwischen allen sechs ungelösten Millennium - Problemen zu betonen. Dieser Trend zur Konsolidierung tritt mehr oder weniger in allen seinen Aspekten auf. Der Verfasser schlägt ein grundsätzlich neues Konzept, das von einer klaren und glaubwürdigen Idee genährt wird.

1 Einleitung

Ohne Theorie der positiv (semi) - definiten Funktionen ist unser Konzept nicht vorstellbar. Eine symmetrische Funktion $\mathcal{F}(v, w) = \mathcal{F}(w, v)$ heißt eine positiv definite Funktion im Definitionsbereich

$$0 < v, w < \infty,$$

wenn für alle Zahlen $-\infty < f_j < \infty$ und mit allen Argumenten $0 < v_j < \infty$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{j,\,k} f_j \mathcal{F}(v_j, v_k) f_k \geq 0.$$

Analog dazu definiert man diese Eigenschaft im abgeschlossenen Intervall. Dabei möchten wir aber auch auf viele andere wertvolle Beobachtungen aufmerksam machen, die in der Definition enthalten sind.

* *2020 Mathematics Subject Classification* Primary 11M06; Secondary 43A35, 81T10

Wir betrachten in diesem Abschnitt positiv definite Funktionen auf ihre Eigenschaften hin. Die meisten Ergebnisse dieses Abschnitts werden später ohne besondere Bezugnahme benutzt.

Zum Beispiel wird die Funktion oft durch Formeln

$$f(v)\mathcal{F}(v,w)f(w)$$

gegeben. In solchen Fällen sind die beide Funktionen

$$\mathcal{F}(v,w), \quad f(v)\mathcal{F}(v,w)f(w)$$

gleichzeitig positiv definit. Es stellt sich heraus, dass jede spaltbare Funktion

$$f(v)f(w)$$

positiv definit ist.

Wenn man v und w selbst wieder als Funktion eines gewissen Arguments betrachtet, so erhalten wir die positiv definite Funktion

$$\mathcal{F}(\varphi(v),\varphi(w))$$

und umgekehrt.

Die Summe zweier Funktionen, die im Definitionsbereich positiv definit sind, ist dort ebenfalls positiv definit. Das gleiche gilt für das Produkt und dieser Satz von Herrn Hadamard enthält die früheren Behauptungen als Sonderfall.

Im Folgenden werden die Reihenentwicklungen für einfache Funktionen angegeben. Unter einer Funktionenreihe mit veränderlichen Gliedern versteht man einen Ausdruck

$$\mathcal{F}_1(v,w) + \mathcal{F}_2(v,w) + \ldots + \mathcal{F}_n(v,w) + \ldots,$$

worin die Funktionen

$$\mathcal{F}_1(v,w),\ \mathcal{F}_2(v,w),\ \ldots\ \mathcal{F}_n(v,w),\ \ldots$$

in einem Definitionsbereich definiert und positiv definit sind. Die Summe

$$\mathcal{F}(v,w)$$

ist auch eine im Konvergenzbereich definierte Funktion. Es ist offensichtlich klar, dass dieser Grenzwert von Partialsummen danach tatsächlich positiv definit ist.

Jetzt wenden wir jedoch unsere Aufmerksamkeit einem anderen Umstand zu. Betrachten wir das Integral

$$\int_0^\infty \mathcal{F}_u(v,w)\,du$$

mit positiv definiten Schichten

$$\mathcal{F}_u(v,w), \quad 0 < u < \infty.$$

Man kann zeigen, dass das Integral auch über diese Eigenschaft verfügt. Im Folgenden werden wir noch Gelegenheit haben, auf die einzelnen Beispiele zurückzukommen.

Häufig könnte eine Funktion $\mathcal{F}(v,w)$ als Kernfunktion über

$$0 < v, w < \infty$$

verstanden werden. Ein symmetrischer beschränkter Operator

$$f(v) \mapsto \int_0^\infty \mathcal{F}(v,w) f(w)\,dw, \quad f \in L_2(0,\infty)$$

ist dank der Spektralzerlegung dann und nur dann positiv

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(v)\mathcal{F}(v,w)f(w)\,dv\,dw \geq 0,$$

wenn sein Spektrum nichtnegativ ist. Dann ist die Funktion $\mathcal{F}(v,w)$ zugleich positiv definit.

Begriffe und Sätze der Funktionalanalysis werden in fast allen Teilen dieser Theorie verwendet. Gegeben sei die gerade stetige Funktion

$$\chi(t) \in L_1(-\infty,\infty), \quad \chi(0) = 1.$$

Es ist sehr wichtig die Form

$$\mathcal{F}(t,\tau) = \chi(t-\tau), \quad -\infty < t, \tau < \infty$$

zu betrachten. Dank dem Satz von Herrn Bochner [1] ist die Funktion $\mathcal{F}(t,\tau)$ genau dann positiv definit, wenn $\chi(t)$ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmasses ist.

Die Bedeutung dieser Erkenntnis wird aber erst im Zusammenhang mit anderen Entwicklungen klar. Darüber hinaus soll ein Einblick in typische Fragestellungen dieses Gebietes gegeben werden.

2 Riemannvermutung

Es ist schwer, neue Gesichtspunkte in dieser von den stärksten Meistern gründlich analysierten Frage zu finden. Zum Beweis unseres Hauptsatzes benötigen wir Hilfssätze, die auch an sich interessant sind.

HILFSATZ I. *Bei den folgenden Funktionen besteht der Definitionsbereich aus geordneten Paaren von reelen Zahlen*

$$0 < v, w < \infty.$$

Betrachtet man C als Konstante, δ hingegen als variable Größe, so sind die zwei verschiedene Formen

$$\frac{\min(v,w)^{2\delta}}{(vw)^{1/2+\delta}} \left[\frac{C}{\delta} \pm \left(1+e^{-v}\right) \left(1+e^{-w}\right) \right], \tag{1}$$

$$C \gg 1, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}$$

positiv definit.

BEWEIS. Die Binomialformel

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \ldots,$$

die früher bereits für ganze positive Zahlen m aufgestellt wurde, erweiterte Herr Newton auf Brüche und negative Werte. Es gibt

$$\frac{1}{(1-z)^\delta} = 1 + \delta z + \frac{\delta(\delta+1)}{2!} z^2 + \frac{\delta(\delta+1)(\delta+2)}{3!} z^3 + \ldots$$

und die Differenz der Funktionen

$$\frac{1/\delta}{(1-z)^\delta} - \frac{z}{(1-z)^\delta}, \qquad -1 < z < 1, \quad 0 < \delta < 1$$

könnte durch eine Potenzreihe

$$\frac{1}{\delta} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} (1-\delta)(\delta+1) \ldots (\delta+n-2) z^n$$

mit geeigneten Gliedern dargestellt werden. Es ist gefunden worden, dass die Koeffizienten α_n dieser Reihe nichtnegativ sind. Dann ist die Funktion

$$\frac{1/\delta - xy}{(1-xy)^\delta}, \qquad -1 < x, y < 1$$

als Summe von spaltbaren Funktionen $\alpha_n x^n y^n$ mit $\alpha_n \geq 0$ positiv definit.

Das Schlussverfahren kann auch für die Funktion der Form

$$\frac{2/\delta - 2xy}{(1-xy)^\delta} + \frac{(1+x)(1+y)}{(1-xy)^\delta} = \frac{2/\delta + 2 - (1-x)(1-y)}{(1-xy)^\delta}$$

angewendet werden.

Ein entsprechender Satz gilt für die Funktion

$$\frac{2/\delta - (1-x)(1-y)}{(1-xy)^{2\delta}}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

Diese positiv definite Funktion ist gleich

$$\frac{4(1+X)^{2\delta}(1+Y)^{2\delta}}{2^{2\delta}} \left[\frac{1}{2\delta} - \frac{X}{1+X} \cdot \frac{Y}{1+Y}\right] \frac{1}{(X+Y)^{2\delta}}$$

unter Verwendung der Hilfsvariablen

$$0 < X = \frac{1-x}{1+x},\ Y = \frac{1-y}{1+y} < \infty; \qquad -\ 1 < x = \frac{1-X}{1+X},\ y = \frac{1-Y}{1+Y} < 1.$$

Es ist auch kennzeichnend, dass die Funktion

$$\left[\frac{1}{2\delta} \cdot \frac{1}{XY} - \frac{1}{(1+X)(1+Y)}\right] \frac{1}{(X+Y)^{2\delta}}$$

positiv definit ist.

Es besteht kein Zweifel, dass die andere Funktion

$$\frac{1}{(1+X)(1+Y)} \cdot \frac{1}{(X+Y)^{2\delta}} \pm \frac{1}{(1+X)(1+Y)} \cdot \frac{1}{(2+X+Y)^{2\delta}} =$$

$$= \frac{1}{(1+X)(1+Y)} \cdot \frac{1}{\Gamma(2\delta)} \cdot \int_0^\infty u^{-1+2\delta} \left(1 \pm e^{-2u}\right) e^{-Xu} e^{-Yu} \, du$$

positiv definit ist.

Daraus kann man den Schluss ziehen, dass ihre Summe

$$\frac{1}{2\delta} \cdot \frac{1}{XY(X+Y)^{2\delta}} \pm \frac{1}{(1+X)(1+Y)(2+X+Y)^{2\delta}}$$

positiv definit sein muss.

Das hat aber zur Folge, dass beide Fälle hier zusammengefasst dargestellt werden. Man kann die letzte Funktion in der Form

$$\frac{1}{\Gamma(1+2\delta)} \cdot \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \min(v,w)^{2\delta} \left[\frac{1}{2\delta} \pm e^{-v}e^{-w}\right] e^{-Xv}e^{-Yw}\,dv\,dw$$

schreiben.

Unsere Ziele erreichen wir durch Anwendung der Laplace - Transformation.

Es wird also durch alle diese Tatsachen bekräftigt, dass die Funktion

$$\min(v,w)^{2\delta} \left[\frac{1}{2\delta} \pm e^{-v}e^{-w}\right], \quad 0<\delta<\frac{1}{2}$$

und die Funktionen

$$\min(v,w)^{2\delta} \left[\frac{1}{\delta} - 2e^{-v}e^{-w}\right] + \min(v,w)^{2\delta} \left(1-e^{-v}\right)\left(1-e^{-w}\right) =$$

$$= \min(v,w)^{2\delta} \left[\frac{1}{\delta} + 2 - \left(1+e^{-v}\right)\left(1+e^{-w}\right)\right]$$

positiv definit sind.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir sie durch $(vw)^{1/2+\delta}$ dividieren. □

Noch von einem anderen Standpunkt aus können diese positiv definiten Funktionen (cf. Hilfsatz I) als Kernfunktionen von Integraloperatoren mit nichtnegativen Spektren betrachten werden.

Eine sehr wichtige Rolle im weiteren Verlauf spielt ihre Komposition

$$\mathcal{K}(v,w) = \int\limits_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}} \left[\frac{C}{\delta} - \left(1+e^{-v}\right)\left(1+e^{-z}\right)\right] \cdot \tag{2}$$

$$\cdot \frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}} \left[\frac{C}{\delta} + \left(1+e^{-w}\right)\left(1+e^{-z}\right)\right] dz.$$

Hilfsatz II. *Das Spektrum des Integraloperators*

$$h(v) \mapsto \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(v,w)h(w)\,dw, \quad h \in L_2(0,\infty)$$

ist ebenso nichtnegativ.

Beweis. Das ist die allgemeine Regel und es ist von entscheidender Bedeutung, das zu erkennen. Das Problem und seine Lösung für beschränkte selbstadjungierte Faktoren im Hilbert - Raum wurde von Herrn Hladnic und Herrn Omladič beschrieben [2]. □

Aber die Komposition selbst ist nicht symmetrisch; eine Möglichkeit der Symmetrierung besteht darin, eine neue Kernfunktion

$$\{\mathcal{K} + k\}(v,w) =$$

$$= \frac{C^2}{\delta^2} \int\limits_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}} \cdot \frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\, dz -$$

$$- \int\limits_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}} \left(1+e^{-z}\right)^2 \frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\, dz \left(1+e^{-v}\right)\left(1+e^{-w}\right)$$

aufzubauen.

Hilfsatz III. *Der Integraloperator des Kerns*

$$k(v,w) = \frac{C}{\delta} \int\limits_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}} \left(1+e^{-z}\right) \frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\, dz \left(e^{-v} - e^{-w}\right)$$

ist kompakt im Hilbert - Raum $L_2(0,\infty)$.

Beweis. Es ist genug zu zeigen, dass der Integraloperator mit dem Kern

$$\delta \int\limits_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}} \cdot \frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\, dz \left(e^{-v} - e^{-w}\right) = \mathcal{E}_\delta(v,w)\left(e^{-v} - e^{-w}\right)$$

vom Hilbert - Schmidt - Typ ist:

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left\{\mathcal{E}_\delta(v,w)\left(e^{-v} - e^{-w}\right)\right\}^2 dv\, dw < \infty.$$

Für eine in Polarkoordinaten

$$v = r\cos\alpha, \quad w = r\sin\alpha$$

gegebene Funktion nimmt das Gebietselement die Form $r\, dr\, d\alpha$ an. Allgemein kann gesagt werden, dass

$$\mathcal{E}_\delta(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \frac{\mathcal{E}_\delta(\cos\alpha, \sin\alpha)}{r}.$$

Ein Doppelintegral kann durch zwei nacheinander auszuführende Integrationen über je eine Integrationsveränderliche berechnet werden:

$$\int_0^{\pi/2} \mathcal{E}_\delta^2(\cos\alpha, \sin\alpha) \int_0^\infty \frac{\left(e^{-r\cos\alpha} - e^{-r\sin\alpha}\right)^2}{r}\, dr\, d\alpha < \infty.$$

Man stellt dazu diese Größe als integrierbare Funktion des Arguments α dar.

In der Tat, gilt es

$$\mathcal{E}_\delta(v,w) = -\ln\left\{\frac{\min(v,w)^{2\delta}}{e(vw)^\delta}\right\} \frac{\min(v,w)^{2\delta}}{(vw)^{1/2+\delta}}. \tag{3}$$

Diese Funktion ist homogen vom Grad -1. Mit anderen Worten, haben wir

$$\mathcal{E}_\delta\left(e^{x/2}, e^{-x/2}\right) =$$

$$= \delta \int_0^\infty \min\left(e^{x/2}, z\right)^{2\delta} \min\left(e^{-x/2}, z\right)^{2\delta} z^{-1-2\delta}\, dz =$$

$$= \delta \int_0^\infty \min\left(e^{x/2}, z\right)^{2\delta} \min\left(1, ze^{x/2}\right)^{2\delta} e^{-\delta x}\, z^{-1-2\delta}\, dz =$$

$$= \delta \int_0^\infty \min\left(e^{x/2}, ze^{-x/2}\right)^{2\delta} z^{-\delta} \min(1,z)^{2\delta} z^{-\delta} z^{-1}\, dz =$$

$$= \delta \int_{-\infty}^\infty \min\left(e^{x/2}, e^{y-x/2}\right)^{2\delta} e^{-\delta y} \min(1, e^y)^{2\delta} e^{-\delta y}\, dy =$$

$$= \delta \int_{-\infty}^\infty e^{-\delta|y-x|}\, e^{-\delta|y|}\, dy = (1 + \delta|x|)\, e^{-\delta|x|}.$$

Im Grunde genommen läuft das auf dasselbe hinaus. □

Alle diese besonders hervorgehobenen Tatsachen werden bald angewandt. Auf die Frage, ob die Kernfunktion

$$\{\mathcal{K} + k\}(v,w)$$

selbst positiv definit sei, soll näher eingegangen werden.

Ein weiter wichtiger Schritt wurde in folgenden Punkten getan. Es bleibt nachzuweisen, dass für eine genügend große Konstante $C \gg 1$ das Spektrum des Integraloperators

$$h(v) \mapsto \int_0^\infty \{\mathcal{K} + k\}(v, w)\, h(w)\, dw$$

gar keinen Eigenwert $\lambda < 0$ besitzt. So hat dieser Operator in der linken Halbebene höchstens ein rein kontinuierliches Spektrum.

Hilfsatz IV. *Das Punktspektrum vom Operator*

$$\mathcal{K} + k$$

in der linken Halbebene ist für eine genügend große Konstante $C \gg 1$ *leer.*

Beweis. Betrachten wir seinen Kern

$$\frac{C^2}{\delta^2} \int_0^\infty \frac{\min(v, z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}} \cdot \frac{\min(w, z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\, dz -$$

$$- \int_0^\infty \frac{\min(v, z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}} \left(1 + e^{-z}\right)^2 \frac{\min(w, z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\, dz \left(1 + e^{-v}\right) \left(1 + e^{-w}\right).$$

Ganz im Gegenteil, stellen wir uns einmal vor, dass die Eigenfunktion mit dem Eigenwert $\lambda < 0$ immer existiert:

$$\int_0^\infty \{\mathcal{K} + k\}(v, w)\, \psi(w)\, dw = \lambda \psi(v), \quad 0 \not\equiv \psi(w) \in L_2(0, \infty).$$

Bei Änderung der Variablen

$$v \mapsto v^{1/2\delta}, \quad w \mapsto w^{1/2\delta}, \quad z \mapsto z^{1/2\delta}$$

erhalten wir nunmehr den Integraloperator des Kerns

$$\frac{C^2}{4\delta^4} \int_0^\infty \frac{\min(v, z)}{vz} \cdot \frac{\min(w, z)}{wz}\, dz -$$

$$- \frac{1}{4\delta^2} \int_0^\infty \frac{\min(v, z)}{vz} \left(1 + e^{-z^{1/2\delta}}\right)^2 \frac{\min(w, z)}{wz}\, dz \left(1 + e^{-v^{1/2\delta}}\right) \left(1 + e^{-w^{1/2\delta}}\right).$$

Lass uns schreiben diesen Operator in der Form

$$\frac{C^2}{4\delta^4}\cdot\frac{1}{v}\int\limits_0^v\int\limits_v^\infty\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{v}\int\limits_0^v\int\limits_v^\infty\frac{1}{v}-$$

$$-\frac{1}{4\delta^2}\left(1+e^{-v^{1/2\delta}}\right)\frac{1}{v}\int\limits_0^v\int\limits_v^\infty\frac{1}{v}\left(1+e^{-v^{1/2\delta}}\right)^2\frac{1}{v}\int\limits_0^v\int\limits_v^\infty\frac{1}{v}\left(1+e^{-v^{1/2\delta}}\right)$$

mit demselben Eigenwert λ und mit der Eigenfunktion

$$0\not\equiv\vartheta(v)=\psi\left(v^{1/2\delta}\right)v^{-1/2+1/4\delta}\in L_2(0,\infty).$$

Die Definition von Hardy - Littlewoodschen Operatoren

$$\frac{1}{v}\int\limits_0^v : h(v)\mapsto\frac{1}{v}\int\limits_0^v h(w)\,dw,\qquad\int\limits_v^\infty\frac{1}{v} : h(v)\mapsto\int\limits_v^\infty\frac{h(w)\,dw}{w}$$

ist bekannt. Gegeben seien die Operatoren

$$\mathcal{B}_\delta=\left(1+e^{-v^{1/2\delta}}\right)\frac{1}{v}\int\limits_0^v\int\limits_v^\infty\frac{1}{v}\left(1+e^{-v^{1/2\delta}}\right)^2\frac{1}{v}\int\limits_0^v\int\limits_v^\infty\frac{1}{v}\left(1+e^{-v^{1/2\delta}}\right).$$

Dann gilt die Gleichung

$$\frac{C^2}{4\delta^4}\Psi\;-\;\frac{\mathcal{D}\mathcal{B}_\delta\mathcal{D}}{4\delta^2}\Psi=\lambda\mathcal{D}^2\Psi,\quad 0\not\equiv\Psi(v)=\frac{1}{v}\int\limits_0^v\int\limits_v^\infty\frac{1}{v}\cdot\vartheta(v),$$

wobei $\mathcal{D}$ den Differentialoperator

$$h(v)\mapsto v\frac{d^2}{dv^2}v\cdot h(v)$$

bezeichnet. Dieser Differentialoperator

$$\mathcal{D}=v\frac{d^2}{dv^2}v$$

ist ein abgeschlossener Operator und sein Definitionsbereich

$$\operatorname{dom}\mathcal{D}\subset L_2(0,\infty)$$

ist mit der sogenannten Graphennorm vollständig.

Für $C \gg 1$ haben unsere Gleichungen keine Lösungen der Form

$$0 \not\equiv \Psi(v) \in \operatorname{dom} \mathcal{D},$$

was im Widerspruch zu irer Definition stünde.

Wir haben zu einer Situation geführt, die ja bereits in der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren ausführlich geschildert worden ist. Dabei setzen wir die Grundlagen dieser Theorie als bekannt voraus (in seinem im Jahre 1978 erst erschienen Buch hat Herr Shubin [7] eine vorzügliche Darstellung gegeben).

Ohne die Allgemeingültigkeit des Vorstehenden Abbruch zu tun, stellen wir

$$\|\Psi\|_{L_2} = 1.$$

Die Eigenfunktionen, deren Werte eine Grundgleichung

$$\left\{ \mathcal{D}^2 + \frac{\mathcal{D}\mathcal{B}_\delta \mathcal{D}}{4\delta^2 \lambda} \right\} \cdot \Psi = \frac{C^2}{4\delta^4 \lambda} \Psi$$

erfüllen, sind über dem kompakten Intervall

$$\frac{1}{2} \le v \le \frac{3}{2}$$

gleichmäßig im Parameterbereich

$$C > 1, \quad \lambda < 0, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}$$

beschränkt.

Dies ist eine direkte Verallgemeinerung des berühmten Theorems von Herrn Hörmander [6, Lemma 4.3, p. 211]. In diesem Zusammenhang sei daran erinnert und es wird als eine in solchen Fällen stets auftretende Erscheinung betrachtet, dass der Ausdruck in Klammern einen elliptischen Pseudodifferentialoperator erbringt.

Wir wollen hier aber einen etwas anderen Weg gehen, so ist das Resultat auf zwei Tatsachen zurückzuführen: unsere eulersche Grundgleichung würde sich in ein Eigenproblem für die Differentialoperatoren

$$\frac{d^4}{dv^4} + q_2 \frac{d^2}{dv^2} + q_3 \frac{d}{dv} + q_4(v)$$

transformieren, wobei außerdem ihre Absolutglieder $q_4(v)$ im Lebesgueschen L_1 - Raum lokal gleichmäßig beschränkt sind.

Sind nun also diese Merkmale bekannt, so braucht man von den sonstigen Eigenschaften gar nicht zu wissen. Unsere Aussage wird auf den Satz von Herrn Komornik [4, Theorem 2, p. 252], [5] reduziert.

Man prüft nun leicht nach, dass die Lösungen der Gleichungen

$$\Psi - \frac{4\delta^4\lambda\mathcal{D}^2}{C^2}\Psi = \frac{\delta^2\mathcal{D}\mathcal{B}_\delta\mathcal{D}}{C^2}\Psi$$

für eine genügend große Konstante $C \gg 1$ nicht existieren. Dies geschieht auf der Basis der Bemerkung am Ende dieses Beweises.

Mittels des Ausdrucks

$$\mathcal{O}_\delta = \left(1 + e^{-v^{1/2\delta}}\right)\frac{1}{v}\int\limits_0^v\int\limits_v^\infty \frac{1}{v}\left(1 + e^{-v^{1/2\delta}}\right)\mathcal{D}$$

lässt sich ein folgender Operator

$$\left(1 + e^{-v^{1/2\delta}}\right)^2 - 2\left(1 + e^{-v^{1/2\delta}}\right)\frac{1}{v}\int\limits_0^v \left(1 + e^{-v^{1/2\delta}}\right)' v +$$

$$+ \left(1 + e^{-v^{1/2\delta}}\right)\frac{1}{v}\int\limits_0^v\int\limits_v^\infty \left(1 + e^{-v^{1/2\delta}}\right)'' v$$

in Erfahrung bringen.

Wir kommen zum Prinzip der Beschränktheit der Zahlenmenge

$$\left\langle \delta^2\mathcal{D}\mathcal{B}_\delta\mathcal{D}\Psi, \Psi\right\rangle_{L_2} = \langle \delta\mathcal{O}_\delta\Psi, \delta\mathcal{O}_\delta\Psi\rangle .$$

Hier betrifft δ als Kompensierung der Aktion vom Operator $\mathcal{O}_\delta$.

Es wird zweckmäßig sein, an dieser Stelle eine Bemerkung über

$$\mathcal{D}^2 = v\frac{d^2}{dv^2}v \cdot v\frac{d^2}{dv^2}v$$

zu machen. Dieser Operator ist positiv und wir dürfen den Widerspruch

$$1 < \langle \Psi, \Psi\rangle - \left\langle \frac{4\delta^4\lambda\mathcal{D}^2}{C^2}\,\Psi, \Psi\right\rangle = \left\langle \frac{\delta^2\mathcal{D}\mathcal{B}_\delta\mathcal{D}}{C^2}\,\Psi, \Psi\right\rangle = \frac{\langle \delta\mathcal{O}_\delta\Psi, \delta\mathcal{O}_\delta\Psi\rangle}{C^2} < 1$$

für eine genügend große Konstante $C \gg 1$ erhalten.

Darüber darf nicht vergessen werden, dass $\lambda < 0$. Nun ist alles gezeigt. $\square$

Beim Beweis dieses Satzes ist etwas mehr herausgekommen, als behauptet wurde, nämlich die Schätzung

$$C > C_\circ \gg 1.$$

Zum Abschluss gehen wir noch etwas auf die positiv definiten Funktionen ein. Hierher gehören die im Gange der Darstellung bereits mitgeteilten Sätze, andere werden gegenwärtig angeführt.

HILFSATZ V. *Die Funktion*

$$\mathcal{E}_\delta(v,w)\left[\frac{C^2}{\delta^2}-\left(1+e^{-v}\right)\left(1+e^{-w}\right)\right] \tag{4}$$

ist für eine ziemlich große feste Konstante $C \gg 1$ *und alle* $0<\delta<1/2$ *positiv definit.*

BEWEIS. Wir nehmen hier auf unsere früheren Ausführungen Bezug. Der Integraloperator mit dem Kern

$$\{\mathcal{K}+k\}(v,w)$$

hätte nach der Störungstheorie höchstens nur ein reines Punktspektrum in der linken Halbebene.

Der Satz von Herrn Weyl [3, p. 96, Problem 182] kann hier angewendet werden, gemäß welchem ein Operator $\mathcal{K}$ mit dem nichtnegativen Spektrum einer kompakten Störung k ausgesetzt ist (cf. HILFSATZ II, HILFSATZ III).

Auf Grund seiner Eigenschaften (cf. HILFSATZ IV) ist der Kern

$$\frac{C^2}{\delta^2}\int_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}}\cdot\frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\,dz\,-$$

$$-\int_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}}\left(1+e^{-z}\right)^2\frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\,dz\left(1+e^{-v}\right)\left(1+e^{-w}\right)$$

positiv definit; dann gilt dies umso mehr für

$$\int_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}}\cdot\frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\,dz\left[\frac{C^2}{\delta^2}-\left(1+e^{-v}\right)\left(1+e^{-w}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mathcal{E}_\delta(v,w)}{\delta}\left[\frac{C^2}{\delta^2}-\left(1+e^{-v}\right)\left(1+e^{-w}\right)\right].$$

In der Tat, ihre Differenz

$$\int_0^\infty \frac{\min(v,z)^{2\delta}}{(vz)^{1/2+\delta}}\left\{\left(1+e^{-z}\right)^2-1\right\}\frac{\min(w,z)^{2\delta}}{(wz)^{1/2+\delta}}\,dz\left(1+e^{-v}\right)\left(1+e^{-w}\right)$$

ist selbstverständlich positiv definit. $\square$

Wo in dieser Arbeit unter dem Zeichen der Integration positiv definite Formen erscheinen, wird schweigend akzeptiert, dass das Integral auch positiv definit ist.

Hilfsatz VI. *Die Funktion*

$$\mathcal{E}_\delta(v,w)\int\limits_0^\infty\left[\frac{C^2\,e^{-(v+w)u}}{\delta^2\,(1+e^{-vu})\,(1+e^{-wu})}-e^{-(v+w)u}\right]du=\{\mathcal{E}_\delta\cdot\mathcal{L}\}(v,w)\quad(5)$$

ist für eine genügend große feste Konstante $C\gg 1$ *und beliebige* $0<\delta<1/2$ *positiv definit.*

Beweis. Hier kommt ein wichtiger Gedanke zum Ausdruck: die Funktion

$$\mathcal{E}_\delta(v,w)\left[\frac{C^2}{\delta^2}-\left(1+e^{-v}\right)\left(1+e^{-w}\right)\right]\frac{e^{-v}}{1+e^{-v}}\cdot\frac{e^{-w}}{1+e^{-w}}=$$

$$=\mathcal{E}_\delta(v,w)\left[\frac{C^2\,e^{-v}e^{-w}}{\delta^2\,(1+e^{-v})\,(1+e^{-w})}-e^{-v}e^{-w}\right]$$

ist positiv definit (cf. Hilfsatz V). Es ist zu betonen, dass

$$\mathcal{E}_\delta(vu,wu)=\frac{\mathcal{E}_\delta(v,w)}{u},\quad 0<u<\infty.\quad(6)$$

Folglich ist die Schicht

$$\mathcal{E}_\delta(v,w)\left[\frac{C^2\,e^{-vu}e^{-wu}}{\delta^2\,(1+e^{-vu})\,(1+e^{-wu})}-e^{-vu}e^{-wu}\right]$$

positiv definit. Dieser Umstand ist für die Berechnung ausschlaggebend. □

Vervendet man jedoch die Formel

$$\frac{e^{-vu}e^{-wu}}{(1+e^{-vu})\,(1+e^{-wu})}=\sum_{n,\,m\,=\,1}^{\infty}(-1)^{n+m}e^{-(nv+mw)u},$$

so kann man sich überzeugen, dass

$$\mathcal{L}(v,w)=\frac{C^2}{\delta^2}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(v+w)u}\,du}{(1+e^{-vu})\,(1+e^{-wu})}-\int\limits_0^\infty e^{-(v+w)u}\,du=$$

$$=\frac{C^2}{\delta^2}\sum_{n,\,m\,=\,1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{nv+mw}-\frac{1}{v+w}.$$

Und nebenbei gesagt:

$$\mathcal{L}(v,w)=\frac{1}{\sqrt{vw}}\,\mathcal{L}\left(\sqrt{\frac{v}{w}},\sqrt{\frac{w}{v}}\right),\quad \mathcal{E}_\delta(v,w)=\frac{1}{\sqrt{vw}}\,\mathcal{E}_\delta\left(\sqrt{\frac{v}{w}},\sqrt{\frac{w}{v}}\right).$$

Nun steht die wichtige positiv definite Funktion

$$\{\mathcal{E}_\delta\cdot\mathcal{L}\}(e^x,e^y)=\frac{\{E_\delta\cdot L\}(x-y)}{e^{\,x}e^{\,y}},\qquad -\infty<x,y<\infty$$

zur Verfügung (cf. Hilfsatz VI).

Dann gilt es

$$\{\mathcal{E}_\delta\cdot\mathcal{L}\}\left(e^{\,x/2},e^{\,-x/2}\right)=\{E_\delta\cdot L\}(x),\quad E_\delta(x)=(1+\delta|x|)e^{\,-\delta|x|}.$$

Wenn die Abhängigkeit zwischen $v=e^{\,x/2}$ und $w=e^{-x/2}$ dargestellt wird, so nennt man

$$\mathcal{L}\left(e^{\,x/2},e^{\,-x/2}\right)=\frac{C^2}{\delta^2}\sum_{n,\,m\,=\,1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{ne^{x/2}+me^{-x/2}}-\frac{1}{e^{x/2}+e^{-x/2}}=$$

$$=\frac{C^2}{\delta^2}\sum_{n,\,m\,=\,1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{2\sqrt{nm}\cosh\left(\frac{x+\ln n-\ln m}{2}\right)}-\frac{1}{2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)}$$

eine explizite Funktion $L(x)$ von x.

Damit schliesst sich der Kreis unserer Hilfsätze; aus allen diesen Sätzen wird zugleich deutlich, dass das folgende Theorem diese Berechnung mit der berühmten Riemannschen Zeta - Funktion

$$\eta(s)=\sum_{n\,=\,1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}=\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s),\quad s=\sigma+it,\ \sigma>0$$

verknüpft.

Hauptsatz. *Für alle kritischen Wurzeln und eine passende Konstante gilt die Ungleichung*

$$|\zeta'(\varrho)|>c>0,\quad \zeta(\varrho)=0,\quad Re\,\varrho=\frac{1}{2},$$

sodass die Riemannvermutung

$$\zeta(s)\neq 0,\quad \sigma>\frac{1}{2}$$

falsch ist.

Beweis. Wir stellen fest, dass die Funktionen

$$\{E_\delta \cdot L\}(x-y), \quad 0<\delta<\frac{1}{2}, \quad -\infty<x,y<\infty$$

positiv definit sind. Nach dem Satz von Herrn Bochner ist die Positivität von

$$\{\widehat{E_\delta \cdot L}\}(t) \ge 0$$

in diesem Zustand nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

Gegeben sind die zwei Fourier - Transformationen

$$\widehat{E}_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\,(1+\delta|x|)\,e^{-\delta|x|}\,dx = \frac{4\delta^3}{\left(\delta^2+t^2\right)^2}$$

und auch

$$\widehat{L}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}\,dx}{2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)} \left\{ \frac{C^2}{\delta^2} \sum_{n,\,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} n^{it} m^{-it}}{\sqrt{n}\sqrt{m}} - 1 \right\} =$$

$$= \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \left\{ \frac{C^2}{\delta^2} \left|\eta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 - 1 \right\}.$$

Die Ableitung von $\zeta(s)$ wird mit Hilfe ihrer Faltung

$$\{\widehat{E_\delta \cdot L}\}(t) = \frac{\{\widehat{E}_\delta \star \widehat{L}\}(t)}{2\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2 \left\{ \frac{C^2}{\delta^2} \left|\eta\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2 - 1 \right\} \cdot \frac{\delta^3\,d\tau}{\left[\delta^2+(\tau-t)^2\right]^2} \ge 0 \quad (7)$$

ausgedrückt.

Es sei $\gamma = Im\,\varrho$. Nach dem Residuumsatz haben wir

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{2}{\pi\delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\{\Gamma\cdot\eta\}\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2 \frac{\delta^3\,d\tau}{\left[\delta^2+(\tau-\gamma)^2\right]^2} =$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{2}{\pi\delta^2} \oint_{\gamma+i\delta} \{\Gamma\cdot\eta\}\left(\frac{1}{2}+iz\right)\{\Gamma\cdot\eta\}\left(\frac{1}{2}-iz\right) \frac{\delta^3\,dz}{\left[\delta^2+(z-\gamma)^2\right]^2} =$$

$$= \left|\{\Gamma\cdot\eta\}'(\varrho)\right|^2.$$

Tatsächlich ist das Residuum gleich

$$-\frac{i}{4}\{\Gamma\cdot\eta\}(\varrho-\delta)\{\Gamma\cdot\eta\}(\bar\varrho+\delta)\;-\;\frac{\delta i}{4}\{\Gamma\cdot\eta\}(\bar\varrho+\delta)\{\Gamma\cdot\eta\}'(\varrho-\delta)\;+$$

$$+\;\frac{\delta i}{4}\{\Gamma\cdot\eta\}(\varrho-\delta)\{\Gamma\cdot\eta\}'(\bar\varrho+\delta)\,.$$

Wenn man den Satz von Herrn Ng benutzt, führt die Riemannvermutung zu einem Widerspruch. Er hat bewiesen [8], dass

$$\inf_{\zeta(\varrho)=0}|\zeta'(\varrho)|=0,$$

ob die Riemannvermutung richtig ist.

Aber jetzt ist die Ungleichung

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{\{\widehat{E}_\delta\star\widehat{L}\}(\gamma)}{2\pi}=|\Gamma(\varrho)|^2\left\{C^2\,|1-2^\varrho|^2\,|\zeta'(\varrho)|^2-1\right\}\geq 0,$$

$$\inf_{\zeta(\varrho)=0}|\zeta'(\varrho)|>0, \tag{8}$$

erstmal gesehen und festgestellt.

Die Unrichtigkeit der Riemannvermutung tritt hier ganz besonders klar in Erscheinung. □

Im Übrigen kommt man mit diesem Hauptsatz gemeinhin schneller ans Ziel. Während p alle Primzahlen durchläuft, gibt es

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}},\quad \sigma>1.$$

Dank dem Satz von Herrn Titchmarsch haben wir

$$M(x)=\sum_{n<x}\mu(n)=-2+\sum_\varrho\frac{x^\varrho}{\zeta'(\varrho)\varrho}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{\zeta'(-2n)n},\quad 1<x<\infty,$$

wo $\mu(n)$ die Möbius - Funktion

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},\quad \sigma>1$$

bezeichnet.

Nehmen wir mal an, dass die Riemannvermutung richtig sein mag. Die bedeutendste und bekannte Reihe

$$\sum_{\varrho} \frac{1}{|\zeta'(\varrho)\varrho|^2}$$

konvergiert nach dem Hauptsatz. Dann ist die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\zeta'(\varrho)\varrho} = \sum_{\varrho} \frac{e^{\,i\gamma u}}{\zeta'(\varrho)\varrho}$$

fastperiodisch in der neuen Variable $u = \ln x$ auf Grund des Satzes von Herrn Besikovitch. Von da können wir versuchen die Mertensvermutung

$$\frac{M(x)}{\sqrt{x}} \leq 1$$

zu beweisen, die bereits widerlegt worden ist.

Korollar. *Insbesondere sind alle Wurzeln von $\zeta(s)$ einfach.*

Beweis. Die Bedingung $Re\,\varrho = 1/2$ im Hauptsatz ist weniger bedeutend und kann ausgelassen werden. Für

$$\varrho = \frac{1}{2} + \varepsilon + i\gamma$$

sollen wir

$$\frac{1}{(vw)^{\varepsilon}} \left\{ \frac{C^2}{\delta^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-(v+w)u}\,du}{(1+e^{-vu})\,(1+e^{-wu})\,u^{2\varepsilon}} - \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-(v+w)u}\,du}{u^{2\varepsilon}} \right\}$$

statt $\mathcal{L}(v, w)$ betrachten. $\square$

Daraus ergibt sich die überwältigende Anzahl von Schlussfolgerungen, aber dennoch viele grundlegende Untersuchungen zum Thema sind in der Literatur gewidmet. Wir wollen uns auf einige Fragen beschränken, die für die Spezifik der Liste ungelöster Millennium - Probleme äußerst bedeutsam sind.

3 Massenlücke und Yang - Mills Gleichungen

Der Leser, der wissen will, was der Sinn von obigen Formeln (1) - (8) ist, soll die Dinge im größeren Zusammenhang sehen. Es muss bekannt sein, wie inhaltliche Beziehungen zwischen

- Riemannvermutung, Quantenfeldtheorie, Supraleitung und Suprafluidität

bestehen können.

Für diesen Zweck benutzt man die folgende Liste, wo jeder Punkt durch eine Nummer von der Formel sowie eine Beschreibung repräsentiert ist:

1. die zweite Quantisierung, die Erzeugungs - und Vernichtungs - Operatoren;
2. der Teilchenzahloperator $\mathcal{K}$;
3. die Entropie $\mathcal{E}$, die Gibbs kanonische Wahrscheinlichkeitsverteilung $e^{-\delta|x|}$;
4. die inverse Temperatur (die Zeit von Herrn Matsubara) δ;
5. die Lagrange - Funktion $\mathcal{L}$, die Kopplungskonstante C;
6. die Eichinvarianz für das Kollisionsintegral mit einem Stoßzahlansatz;
7. die Eigenmoden des Hamilton - Operators, die Greensche Funktion $\widehat{E}_\delta \star \widehat{L}$;
8. das Quasiteilchen, die Resonanz, die Massenlücke $|\zeta'(\varrho)| > c$.

Wenn wir ein Masse - Problem in der Eichfeldtheorie lösen wollen, so müssen wir es so eingehend analysieren. Unser Hauptsatz hat sich als sehr fruchtbar gezeigt, sofern man diesen Satz als führendes Prinzip gelten lässt.

4 Navier - Stokes Gleichungen

Die eulerschen Gleichungen für die Bewegung einer vollkommenen Flüßigkeit lassen sich durch eine einzige Vektorgleichung ersetzen, und zwar

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V} = -\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V} - \frac{\nabla \mathrm{P}}{\rho}.$$

Die Strömung ist inkompressibel; das bedeutet, dass die Divergenz Null ist:

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0.$$

Es kommt darauf an, wie diese Situation von der Viskosität δ beeinflusst wird. Die entsprechende Navier - Stokes Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V} = \delta\,\nabla^2\mathbf{V} - \left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V} - \frac{\nabla \mathrm{P}}{\rho}$$

wird über einen dreidimensionalen Torus $\mathbb{T}^3$ betrachtet.

Zwischen der Navier - Stokes Gleichung und der Wärmeleitungsgleichung tritt demnach eine unverkennbare Analogie hervor, und auf diese Analogie stützt sich ein neuer Ansatz [9] zur Lösung.

Nun ist schon in den früheren Arbeiten [10] darauf aufmerksam gemacht worden, dass die Riemannvermutung mit der Spektralschar vom Operator ∇^2 über $\mathbb{T}^3$ eng verbunden ist.

5 Vermutung von Birch und Swinnerton - Dyer

An ganz ähnlichen Gründen, wie früher, ist die Riemannvermutung in der Form

$$\prod_{p \equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p \equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{1+p^{-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} =$$

$$= \beta(s) \neq 0, \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

nicht wahr und das Eulerprodukt divergiert.

Wir sind hiermit beim Kreis von Begriffen angelangt, in dem die Theorie der elliptischen Kurven

$$E : y^2 = x^3 + ax + b, \quad \Delta = -16 \left(4a^3 + 27b^2\right)$$

entwickelt hat, so eröffnet sich der Anwendung ein großes Gebiet.

Die nächste Aufgabe geht dahin, allgemeine Methoden für L - Funktionen zu finden, sodass die Riemannvermutung

$$\prod_{p \nmid \Delta} \frac{1}{1 - \{p+1-\#E(\mathbb{F}_p)\}\, p^{-s} + p^{1-2s}} = L(s,E) \neq 0, \quad \sigma > 1$$

nicht zutreffend ist.

Ganz allgemein gefragt: ist es möglich solche specielle elliptische Kurve zu bauen?

Das gefundene Resultat von Herrn Goldfeld [11], gebündelt mit diesem Beispiel, hätte den Ausdruck, der sich in die folgenden Worten kleiden lässt: die ursprüngliche Vermutung von Herrn Birch und Herrn Swinnerton - Dyer

$$\prod_{p \leq x,\, p \nmid \Delta} \frac{\#E(\mathbb{F}_p)}{p} \sim C_E \, \{\ln x\}^{\operatorname{rank} E(\mathbb{Q})}$$

wird widerlegt.

Hierbei gibt sich aber ein Unterschied zwischen schwacher und starker Form ihrer Hypothese [12].

6 Vermutung von Hodge

Der vorliegende Gegenstand hat eine nahe Verwandtschaft mit der berühmten Theorie der Motive, die darauf abzielen, die Riemannvermutung nachzuweisen [13]. So rührt es daher, dass diese Theorie einen inneren Widerspruch, eine unmögliche Forderung enthält.

Die letzte Aussage erhält eine anschauliche geometrische Bedeutung. Auf diese Weise fahren wir fort, bis wir entweder die Riemannvermutung behalten oder uns überzeugt haben, dass die Vermutung von Herrn Hodge verfälscht wird.

7 P vs. NP

Es fragt sich nun: welche Folgerungen lassen sich aus diesen Beobachtungen ziehen? Wie aber soll man nun weiter verfahren? Denn einmal hat es sich als geradezu unmöglich erwiesen, wo genau die Grenzen eines Feldes liegen ...

 E - mail: egorovmillenium@gmail.com

Literaturverzeichnis

[1] Bochner S. *Harmonic Analysis and the Theory of Probability* University of California Press, 1955

[2] Hladnic M., Omladič M. *Spectra of the product of operators* Proc. Amer. Math. Soc. 102 (2) 300 - 302 (1988)

[3] Halmos P. R. *A Hilbert Space Problem Book* Second Edition, Springer, 1982

[4] Komornik V. *Local upper estimates for the eigenfunctions of a linear differential operator* Acta Sci. Math. 48, 243 - 256 (1985)

[5] Komornik V. *Uniformly bounded Riesz bases and equiconvergence theorems* Bol. Soc. Paran. Math. (3s) 25, 1 - 2, 139 - 146 (2007)

[6] Hörmander L. *The spectral function of an elliptic operator* Acta Math. 121, 193 - 218 (1968)

[7] Shubin M. A. *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory* Springer, 2001

[8] Ng N. *Extreme values of* $\zeta'(\varrho)$ J. Lond. Math. Soc. 78 (2) 273 - 289 (2008)

[9] Vanon R., Ohkitani K. *Applications of a Cole - Hopf transform to the 3D Navier - Stokes equations* J. of Turbulence 19, 1 - 12 (2018)

[10] Heath - Brown D. R. *Lattice points in the sphere* Number theory in Progress 2, 883 - 892 (1997)

[11] Goldfeld D. *Sur les produits eulériens attachés aux courbes elliptiques* Compt. Rend. Acad. Sc., Paris Sér I Math. 294, 471 - 474 (1982)

[12] Birch B., Swinnerton - Dyer H. *Notes on elliptic curves II* J. reine angew. Math. 218 (1965) 79 - 108

[13] Kleinman S. L. *The Standard Conjectures* Motives. Seattle WA 3 - 20 Proc. Symp. Pure Math. 55 Part 1 Amer. Math. Soc. Providence RI, 1994